

1 解答 問1 4320 問2 $x = \pm 1, \pm i$ 問3 ベクトルの内積の方が大きい

解説

問1 2024を素因数分解すると

$$2024 = 2^3 \times 11 \times 23$$

となるので、正の約数の和は

$$(1+2+4+8) \times (1+11) \times (1+23) = 15 \times 12 \times 24 = 4320 \quad \dots \text{答}$$

問2 $x^4 = 1 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$x^2+1=0 \Rightarrow x = \pm i$$

よって、 $x = \pm 1, \pm i \quad \dots \text{答}$

問3 ベクトルの内積は

$$|1| \cdot |1| \cdot \cos 75^\circ = \cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

この値と $\frac{1}{4}$ を比べるために、その差を求める。どちらも正の値なので、2乗の差を求める。

$$\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7 - 2\sqrt{12}}{16} = \frac{\sqrt{49} - \sqrt{48}}{16} > 0$$

よって、ベクトルの内積の方が $\frac{1}{4}$ より大きい。 $\dots \text{答}$

2 解答 問1 $a = \frac{3}{4}$ 問2 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

解説

問1 円 : $x^2 + (y-2)^2 = 1$ ……①

放物線 : $y = x^2 + a$ ……②

とおく。②より

$$x^2 = y - a$$

これを①に代入して

$$y - a + (y-2)^2 = 1 \implies y^2 - 3y + 3 - a = 0 \quad \dots\dots③$$

この式の判別式を D とおくと、

$$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (3 - a) = 4a - 3$$

①と②は接するので、 $D = 0$ より、

$$a = \frac{3}{4} \quad \dots\dots\text{答}$$

問2 問1より、②の式は

$$y = x^2 + \frac{3}{4} \quad \dots\dots④$$

③に $a = \frac{3}{4}$ を代入して

$$y^2 - 3y + \frac{9}{4} = 0 \implies \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \implies y = \frac{3}{2}$$

これを④に代入して

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= x^2 + \frac{3}{4} \implies x^2 - \frac{3}{4} = 0 \implies \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \\ \implies x &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

これより接点の座標A、Bは

$$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

となる。

直線ABは $y = \frac{3}{2}$ であり、これより求める図形は

右図の陰影部。よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \frac{3}{2} - \left(x^2 + \frac{3}{4}\right) \right\} dx + \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 120^\circ \\ &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-x^2 + \frac{3}{4}\right) dx + \frac{\sqrt{3}}{4} = 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= 2 \left\{ -\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \dots\dots\text{答} \end{aligned}$$

となる。

