数学甲　解答

1

問１　C: $y=\log x$ を微分すると $y'=\dfrac{1}{x}$

点 $(a,\log a)$ における接線 l_1 は $y-\log a=\dfrac{1}{a}(x-a) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{a}x+(\log a-1)$ …答

問２　l_1 と同様に l_2 を求めると $y=\dfrac{x}{2a}+(\log 2a-1)$

l_1 と l_2 を連立して

$$\frac{1}{a}x+(\log a-1)=\frac{x}{2a}+(\log 2a-1) \Leftrightarrow \frac{x}{2a}=\log 2a-\log a=\log 2$$

$$\Leftrightarrow x=2a\log 2 \ \cdots①$$

①を l_1 の式に代入して $y=\dfrac{1}{a}(2a\log 2)+(\log a-1)=2\log 2+\log a-1$

よって交点の座標は　$(2a\log a,\ 2\log 2+\log a-1)$ …答

問３　a が正の数より $a<2a\log 2<2a$ であるので求める面積は

$$\int_a^{2a\log 2}\left\{\frac{x}{a}+(\log a-1)-\log x\right\}dx+\int_{2a\log 2}^{2a}\left\{\frac{x}{2a}+(\log 2a-1)-\log x\right\}dx$$

$$=\int_a^{2a\log 2}\left\{\frac{x}{a}+(\log a-1)\right\}dx+\int_{2a\log 2}^{2a}\left\{\frac{x}{2a}+(\log 2a-1)\right\}dx-\int_a^{2a}\log x\,dx$$

第１項

$$\left[\frac{x^2}{2a}+(\log a-1)x\right]_a^{2a\log 2}=\frac{1}{2a}\{4a^2(\log 2)^2-a^2\}+(\log a-1)(2a\log 2-a)$$

$$=2a(\log 2)^2-\frac{a}{2}+2a(\log a)(\log 2)-a\log a-2a\log 2+a$$

第２項

$$\left[\frac{x^2}{4a}+(\log 2a-1)x\right]_{2a\log 2}^{2a}=\frac{1}{4a}\{4a^2-4a^2(\log 2)^2\}+(\log 2a-1)(2a-2a\log 2)$$

$$=a-a(\log 2)^2+2a\log 2a-2a(\log 2)(\log 2a)-2a+2a\log 2$$

$$=-a-a(\log 2)^2+4a\log 2-2a(\log 2)^2+2a\log a-2a(\log a)(\log 2)$$

第３項

$$-\Big[x\log x-x\Big]_a^{2a}=-(2a\log 2a-2a)+(a\log a-a)=a-2a\log 2-a\log a$$

これらを合わせて $S(a)=\dfrac{a}{2}-a(\log 2)^2$

よって $\dfrac{S(a)}{a}=\dfrac{1}{2}-(\log 2)^2$ …答

$\boxed{2}$

問1

$f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}+a$

$f'(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$ よって

接線は $y=\left(2t+\dfrac{1}{t^2}\right)(x-t)+t^2-\dfrac{1}{t}+a$

$y=\left(2t+\dfrac{1}{t^2}\right)x-t^2-\dfrac{2}{t}+a$

問2

これが $(0, 0)$ を通るとき

$0=-t^2-\dfrac{2}{t}+a$

$a=t^2+\dfrac{2}{t}$

これをみたす t が2個存在すればよい。

$g(t)=t^2+\dfrac{2}{t}$ とおくと

$g'(t)=2t-\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{2(t-1)(t^2+t+1)}{t^2}$

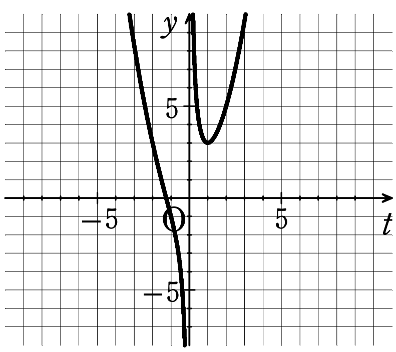
$t^2+t+1=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より

$g(t)$ の増減は

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	/	$-$	0	$+$
$g(t)$	↘	/	↘	3	↗

$\displaystyle\lim_{t\to-\infty} g(t)=+\infty$ $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t)=+\infty$ $\displaystyle\lim_{t\to+0} g(t)=+\infty$ $\displaystyle\lim_{t\to-0} g(t)=-\infty$

等より $g(t)$ のグラフは下図のようになる



よって $y=a$ とグラフが丁度2点を共有するのは、 $a=3$ のときである。

$\boxed{3}$

問1

$|z-1|=\sqrt{2}$ より $|z-1|^2=2$

$|z-1|^2=(z-1)(\overline{z}-1)=2$

$z\overline{z}-z-\overline{z}+1=2$ から

$z\overline{z}=z+\overline{z}+1$

$$1=\frac{1}{\overline{z}}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z\overline{z}}$$

$$\left|\frac{1}{z}+1\right|^2=\left(\frac{1}{z}+1\right)\left(\frac{1}{\overline{z}}+1\right)=\frac{1}{z\overline{z}}+\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}+1=1+1=2$$

問2

$\left|\frac{1}{z}+1\right|=\sqrt{2}$ より $|1+z|=\sqrt{2}|z|$

$$\left|\left(\frac{1}{z}+1\right)(1+z)\right|=2|z|$$

$$\left|\frac{1}{z}+1+1+z\right|=2|z|$$

$$\left|z+\frac{1}{z}+2\right|=2|z|$$

$|w+2|=2|z| \quad \cdots①$

$|z-1|=\sqrt{2}$ より $\left|1-\frac{1}{z}\right|=\frac{\sqrt{2}}{|z|}$

$$|z-1|\left|1-\frac{1}{z}\right|=\frac{2}{|z|}$$

$\left|(z-1)\left(1-\frac{1}{z}\right)\right|=\frac{2}{|z|}$ より

$$\left|z-1-1+\frac{1}{z}\right|=\frac{2}{|z|}$$

$$\left|z+\frac{1}{z}-2\right|=\frac{2}{|z|}$$

$|w-2|=\frac{2}{|z|} \quad \cdots②$

①と②より $|w+2||w-2|=2|z|\cdot\frac{2}{|z|}=4$

4

問1

Bの袋から白を取り出す場合なので、

$\frac{1}{2}$

問2

$n+1$ 回目にAに白があるのは、

n 回目に白があって、Bから白を取り出す場合か

n 回目に赤があって、Bから白を取り出す場合か

よって

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{3}{4}(1-p_n)=-\frac{1}{4}p_n+\frac{3}{4}$$

問3

$$p_{n+1}-\frac{3}{5}=-\frac{1}{4}\left(p_n-\frac{3}{5}\right)$$

$$p_n=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}(p_1-1)+\frac{3}{5}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=0$ より $\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{3}{5}$